

高校生に対する最速降下曲線についての出張授業について

A lecture for high school students on brachistochrone

川上 智博（和歌山大学教育学部）

Tomohiro KAWAKAMI

概 要

本稿では、和歌山県立の高校での最速降下曲線についての出張授業の一例について報告する。

【キーワード】最速降下曲線、サイクロイド

1. はじめに

本稿では、和歌山県立の高校での出張授業の一例について報告する。

大学などの高等教育機関の教員が、高校生・中学生を対象とした数回完結型、または一回完結型の出張授業を頼まれることが近年増えてきた。また、高校生が現代数学に触れ合うために、高校においての大学教員による出張授業を受ける機会も増えてきた。

2009年9月に行った出張授業は50分授業2回を一日で行い、その翌日に50分授業を2回行うものであった。総授業時間は、200分であった。今回の出張授業はサイエンスパートナーシッププログラム(SPP)によるものである。高校2年生の理系のクラスを対象とし、生徒参加型の出張授業を行った。

初回の計画は以下である([1])。4人程度の班を10班～11班つくる。各班に、発泡スチロールとスチロールカッターを配り、発泡スチロールを切って曲線を実際に作らせる。このとき、縦と横の長さは指定しておく。ビー玉がなめらかに転がるための溝をきれいに加工するのは大変高度な技術があるので、今回はビー玉を転がすコースの後ろに発泡スチロール板をおく予定である。試行錯誤を繰り返す中で、より速く滑り降りる曲線を探す。スチロールカッターを使えば発泡スチロールの加工は簡単にできるので、好きな形に曲線を変形することができる。したがって、すぐ新しい曲線を作り直し、ビー玉転がしの実験ができる。各班のアイデアを競い合わせてみて、最適な曲線に近いものを求める。実験では、はっきりした差は見つ

からないと予想されるので、各班に競い合わせるとおもしろいことになると考えている。一方このような実験の限界に対して、高度な数学を使えば、数式を使った厳密な解法で可能であることを伝えたい。

二回目の計画は以下である([1])。その曲線がサイクロイドと呼ばれている曲線であることを納得してもらうための時間である。担当者から媒介変数表示を与えて、生徒はその数式に具体的に数値を代入し、方眼紙に点をプロットして、サイクロイドを描く作業を行う。この際、様々な数値の正弦や余弦の値を求めなければいけないので関数電卓が必要になる。

最速降下曲線について[2]を参考にした。

2. 一回目の授業方法

発泡スチロールを加工する作業を行うために、大きな机のある情報教室で行った。生徒参加型の授業を行うために、発泡スチロール・発泡スチロールカッター・関数電卓のほかに生徒達の座席表、ワークシート等を用意してもらった。授業の題目は「最速降下曲線について」とした。生徒達が最速と考える曲線の製作に時間がかかることがわかっていたので、授業はパソコンの画面をスクリーンに映し出すことによって行った。

まず、著者の自己紹介および高校側の担当者と著者との関係についてから授業を始めた。高校側の担当者が著者の大学の先輩であるので、そのことを紹介すると生徒達が興味をもった。授業の中で、できるだけ問いかけを行って生徒達を指名して答えてもらった。重要と思われることは、しばらく待って、ワークシー

トに書き込んでもらった。

座標平面内に座標軸をとり、重力のみが下向きに働いているとして、質点が点 $A(0, 2)$ から点 $B(\pi, 0)$ へ滑り落ちる運動を考え、 A から B へ最も速く滑り落ちる曲線を考察することを説明した。授業の題目を「最速降下曲線について」としたが、最速降下曲線の意味がわかりにくかった。 A から B への最短距離となるものは、線分 AB となるが、これが最速ではないことを説明した。また、最も速く滑り落ちる曲線が存在することが知られていて、それを最速降下曲線ということを説明した。

曲線の製作の都合上、縦と横の比を $2 : \pi$ とした。この理由は、二日目の授業のときに説明することを予告した。実際の製作は、縦が 20 センチメートル、横が 63 センチメートルの長方形の部分に曲線が製作できる発泡スチロールを用いた。曲線の製作に必要な長方形の発泡スチロールや発泡スチロールカッターを用意してもらって、6 人または 7 人を一つの班として、生徒達が最速と考える曲線を長方形の発泡スチロールを発泡スチロールカッターで切るにより、製作してもらった。計画では、4 人で一つの班と想定でしたが、予算の都合で、6 人または 7 人を一つの班とし、全部で 7 つの班に分かれてもらった。

生徒達は、製作に入る前にどのような曲線が最も速く滑り落ちるかよく考えていた。最初の傾きがゆるくて、あとの方が急な傾きの方が速いのか、また、最初の傾きが急で、あとの方がゆるい傾きの方が速いのか、試行錯誤していた。

実際に製作に入ってからでも試行錯誤が続いていた。山が二つある曲線や、 x 軸の下に下がってから、再び上昇する曲線や、最初の傾きが急で、途中からほぼ水平な曲線などが作られていた。作り直したい班もあり、用意していた接着剤で接着しなおしてから、再び切って製作してもらった。

製作終了後、出来上がった曲線の中には、正解となるサイクロイドに近いものもあった。出来上がった 7 つの曲線の模型を教卓の前にもってきて、まず、二つを並べて、ビー玉を転がして、どちらが速いが競争した。速い方を残して、次の班の曲線と競争した。これを繰り返して、構成された曲線の中で最も速く転がるものを決めた。

あらかじめ正解であるサイクロイドを製作しておいて、各班が作った曲線と競争を行った。最も速い班は、正解の曲線とほぼ同時であった。遅い班ものも、数センチメートルの差しかなかった。

どちらが速く転がるか決める際に、曲線の後ろに発泡スチロール板をおいて、ビー玉を転がした。ところが、何回かビー玉がコースアウトしてしまった。原因は、発泡スチロールカッターによる切断面が平坦でなかったためであった。

正解となるサイクロイドの説明に入った。生徒達は高校 2 年生なので、媒介変数表示が未習である。正解は、直線 $y = 2$ 上をすべることなく半径 1 の円を転がしたときの 1 点の描く軌跡である。この曲線は、媒介変数と呼ばれる変数 θ を用いて表示され、

$$\begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 + \cos \theta \end{cases}, 0 \leq \theta \leq \pi$$
 となることを説明した。

生徒達が高校 3 年生になったときに習うサイクロイドとは、「向き」が違うので、今回のサイクロイドを「上向きサイクロイド」と呼ぶことにした。高校 3 年生で習うサイクロイド（「下向きサイクロイド」）についても説明した。

3. 二回目の授業方法

昨日習った内容の復習から始めた。

あらかじめ製作しておいた正解であるサイクロイドと生徒達の製作した曲線上にビー玉を転がして競争してみせた。サイクロイドの媒介変数表示式やその求め方の復習も行った。また、ホワイトボード上で、円を転がしながら、サイクロイドを描いていった。

つづいて、生徒達に一周期分のサイクロイドを描いてもらうために、まず関数電卓の使い方を説明した。使用ガイドはあらかじめ作ってもらっておいた。0 から 2π までの角を $\frac{\pi}{6}$ 刻みで、 x 座標と y 座標を書き込める表と方眼紙を配付した。

生徒達は、最初は関数電卓の使い方に戸惑っていたが、しばらくすると、全員が x 座標と y 座標の値を書き込むことができた。この値をもとに、点をプロットしてサイクロイドを描くことができた。プロットした点を結ぶときに、困っていた生徒もいたが、教卓においておいた正解のサイクロイドを見て、全員がうまくサイクロイドを描くことができた。

サイクロイドの描画が終わったので、その性質について問いかけを行った。

サイクロイドの頂上 A から転がし始めたときと、その途中の C から転がし始めたときと、どちらが速くゴールするか問いかけてみた。生徒達からは、(1) A が先にゴールする、(2) C が先にゴールする、(3) 同時にゴールするの 3 通りの解答が出た。

実際にビー玉を転がして、実験してみた。同時であることがわかった。厳密には、計算で降下時間求めて、等しくなることを証明しないといけないが、高校 2 年生では、その計算ができないので、実験結果で納得してもらった。どこから転がしても同時にゴールする性質を等時性ということを説明した。

サイクロイドが最速降下曲線とわかる前は、 A と B を通る円弧の一部が、最速だと思われていたこと、円弧とサイクロイドとの降下時間の差はわずかであることを説明した。

最初に設定した条件である縦と横の比が $2:\pi$ でない場合について説明した。 $a > 0, b > 0$ とすると、 $A(0, a)$ から $B(b, 0)$ への最速降下曲線は、サイクロイドの一部であることが知られていることを説明した。 $0 < b \leq \frac{a\pi}{2}$ のときは、サイクロイドの一部で降下し続ける曲線であり、 $b > \frac{a\pi}{2}$ のときは、サイクロイドの一部であるが、一度 x 軸の下に下がってから、再び上昇する曲線となることを説明した。高校生達には、どの場合も降下し続ける曲線が、最速と考えていたようで、一度下ってから再び上昇する曲線が最速となることは、驚きであったようだ。

以上で授業内容が終了した。終了時刻の30分前であった。その後、SPPのアンケートと著者個人のアンケートをとった。SPPのアンケートは、記入内容が多かったが、15分程度で終了した。校長先生や教育委員会関係者も参観に来てくださったが、アンケート記入中の時間であった。

アンケート記入後、少し時間があつたので、和歌山大学の1年生がどのような数学を学ぶのかを説明して終了した。

4. 高校生向けに試行錯誤した点・配慮した点、生徒のアンケート等について

高校生向けに配慮した点は、実習や作業や実験を取り入れた点や高校の教科書には書かれていないが、生徒達が興味をもつであろう内容を授業した点である。

高校側の担当者に大学に2回来てもらって、授業の打ち合わせを行った。最速降下曲線の模型を作る際に、何を切って曲線を製作するかということから検討した。板を切る案、ダンボールを切る案などが出たが、製作のしやすさなどから、発泡スチロールを切る方法をとることになった。発泡スチロールを切って、その曲面にホースを貼り付けて、その中をビー玉を転がして、速度を競う予備実験を行ってみた。ところが、ホースを貼り付けるものだと、曲線による降下時間の差がわかりにくいことが判明した。発泡スチロールを切った曲線の上をビー玉を転がす方法をとることになった。曲線だけだと、ビー玉はすぐにコースアウトしてしまうので、曲線を少し傾けて、その後ろ側に大きめの発泡スチロールをおくことにした。このときの予備実験では、ビー玉はほとんどコースアウトすることがなかった。このときのコースは、高校側の担当者や著者が、切断面を平坦にしたものであったので、コースアウトすることが少なかったのであった。実際に高校生達が製作した曲線は、切断面が平坦ではないものがあつたために、降下速度を競ったときに、何回かビー玉がコースアウトしてしまった。高校生達の中には、初めて発泡スチロールを加工し

た者もいたもので、切断面をうまく加工できなかったこともある程度仕方ないことであろう。

上向きサイクロイドが最速降下曲線になることの証明に近いことを授業することも考えたが、対象生徒は高校2年生であったので、実験において理解してもらった。高校2年生の9月時点では、微積分を未習であり、三角関数の一般角・弧度法が既習の状態である。媒介変数表示も未習であるので、このときの授業で説明した。実際に上向きサイクロイドを描いてもらうときも、点をプロットするときの角を $\frac{\pi}{6}$ 刻みとした。角の刻みを細かくすると、きれいなサイクロイドが描けるのだが、三角関数の値の計算が複雑になるために、 $\frac{\pi}{6}$ 刻みを採用した。点をプロットしやすくするために、関数電卓を用いた。

授業日数を3日間として、微積分も授業してから、上向きサイクロイドの最速性を詳しく説明するというのも考えた。微積分は、高校生にとって大きなテーマであり、出張授業で終わられるようなものではないので、微積分の授業をしないで、授業日数を2日間とすることにした。高校3年生であれば、微積分も一部は既習であるが、出張授業は、高校側の都合により、高校2年生に対して行うことが多いそうである。

SPPのアンケートと著者個人のアンケートの二つを行った。SPPのアンケートは4枚あり、最後のQ29の「SPPの講座へ参加した感想を、自由に書いてください。」の部分を書かせていただいた。以下がそのアンケート結果である。肯定的な感想が多かったが、何も書かれていないものや否定的なものもあった。

・関数電卓を打ったり、何より大学の先生が来て授業してくれるのは、少ないと思うのでおもしろい体験になった。

・めったにない貴重な経験をさせていただいて、うれしいです。

・発泡スチロールで作業したのが、楽しかったです。分かりやすく説明してくれたので、理解しやすかった。数学が好きになりました。また、機会があったら、違う分野の講座も受けてみたいです。

・普段の授業でやらないことを勉強できたし、実際に実験をやって、たしかめながら、できたのでとてもわかりやすかったです。今回の授業でけっこうむずかしいと思ったけど、まだまだ深いところまでやっていないと聞いてびっくりしました。

・まだ習っていない内容だったけど、4時間かけることによってよく理解できたと思う。

・難しいことばかりするんだろなあと不安だったが、僕らでも十分理解できるものだったのでよかった。

・大学の教員の方に教えてもらったので、大学ではどのような授業の感じなのかちよつと分かったと思うのでよかった。

・予想していたより楽しくなかった。

- ・実験をすることでいつもは難しくてわからなかったことを楽しく学んでわかりやすかった。
- ・少し不真面目にうけてしまったことを後悔しています。2日目の講座の方が楽しかったです。
- ・いつもの授業と違う感覚で勉強できたので、結構楽しかったです。こんな機会があればまた是非参加したいです。
- ・考え方がむずかしかった。
- ・けっこう難しかったし、計算もややこしかった。数学は奥が深いなあと思った。
- ・普段とは違う数学の授業が聞けて良かったし、いつもとは別の楽しみがあって良かったです。また機会があれば受講したいと思う。
- ・いつもとは違う授業で楽しかったです。
- ・最速降下曲線というものが存在し、それを三角関数で表すことができるのがすごいと思った。今日、初めて使った関数電卓もすごかった。できたらまたこのような授業を受けたい。
- ・3年生で習うことができたし、良かったです。
- ・難しかったが必要そうだった。
- ・自分にとってちょっとむずかしくてあまりしっくりこなかったけど、SPPの講座を受けて数学もちゃんと勉強しなくてはいけないと思った。
- ・内容が難しくなかなか理解できなかったです。もし次に講座があった時はしっかり理解できるようにしたいです。
- ・とても難しかった。数学は奥深いと思った。
- ・作業する授業なので楽しかったです。
- ・発泡スチロールを切って早く転がせるようにするのが楽しかった。
- ・内容は難しかったけど、なかなか興味深い講座だった。
- ・わからないところが解決できたりしたのでよか

った。

- ・発泡スチロールの加工作業がけっこう楽しかったです。
- ・おもしろかったです。また来てください。
- ・普段の授業では学べないことをたくさん学べてよかった。作業などもあって、楽しかった。
- ・発泡スチロールを使って実験して楽しかった。サイクロイドのすごさが分かっておもしろかった。
- ・まあまあ楽しかったです。
- ・今回の講座は、おもしろかったです。いつも授業とは違った方向での数学の勉強をしていっそう関心をもつようになりました。これからはこういったことも習ってみたいと思います。

授業中の生徒の反応・達成度について、教育委員会関係者からのコメントをいただきましたかったが、いただけなかった。校長先生や教育委員会関係者も参観に来てくださったが、生徒達がアンケート記入中のわずかな時間しか参観してもらえなかったことが原因であると考えている。

5. 謝辞

出張授業を行う機会を与えてくださった和歌山県立耐久高等学校の上田芳裕先生に感謝します。

参考文献

- [1] 上田芳裕, SPP 申請書 (2009).
- [2] Stan Wagon, *Mathematica in Action*, Second Edition, (2000) Springer.